403 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ VII

福原満洲雄(北大)

大体ニ於テ豫期シタ結果ニ達シタコトハ數物ノ年會デ述ベタ通リデアルカラ，前回ノ予定ヲ変更シテ整頓シタ形ニ於テ結果ノ紹介ヲ証明抜キデ述ベヨウト思フ。

特異点(I)

$$\text{(A)} \qquad x\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

ニ於テ $f(x,y)$ ガ

$$\text{(a)} \qquad f(x,y)\sim\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}x^{j}y^{k} \quad (a_{00}=0,\ a_{01}=\lambda\neq 0)$$

ナル形ニ展開サレル場合カラ始メル。コレハ今迄ニ最モヨク研究サレタ場合デアルカラ，考ヘ直ス必要ハナイカモ知レナイガ，理論的統一ノ立場カラ述ベテ置イタ方ガヨイヤウニ思フ。

形式的ノ計算　展開式(a)ガ何ヲ意味スルカヲ問題トシナイデ唯形式的ノ計算ニ依テ得ラレル結果ヲ先ニ述ベ

ヲ置ク。

形式的ノ解

$$\alpha) \quad y \sim \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x^j$$

ヲ求メル。コレヲ (A) ニ入レテ x^j ノ係數ヲ比較スルコトニヨリ

$$(j-\lambda)\alpha_j = P_j(\alpha)$$

ヲ得ル。$P_j(\alpha)$ ハ $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_{j-1}$ ノ整多項式デアル。故ニ λ ガ正ノ整數デナケレバ α_j ハ唯一通リニキマル。

$$y = \alpha_1 x + \cdots\cdots + \alpha_{N-1} x^{N-1} + z$$

ト置イテ，z ガ滿足スル方程式ヲ

$$\text{(B)} \quad x\frac{dz}{dx} = g(x, z)$$

ト書ケバ

$$(b) \quad g(x,z) \sim \sum b_{jk} x^j z^k$$

$$b_{j0} = 0 \quad (j < N), \quad b_{01} = \lambda$$

トナル。

勝手ナ常數 C ヲ含ム形式的ノ解

$$\beta) \quad y \sim \sum \alpha_{jk} x^j (Cx^\lambda)^k \quad (\alpha_{00} = 0, \alpha_{01} = 1)$$

ヲ求メル．コレヲ (A) ニ入レテ $x^m(Cx^\lambda)^n$ ノ係數ヲ比較スルコトニヨリ

$$(m + (n-1)\lambda)\alpha_{mn} = P_{mn}(\alpha)$$

ヲ得ル。$P_{mn}(\alpha)$ ハ α_{jk} ($j \leqq m$, $k \leqq n$ 但シ α_{mn} ヲ除ク) ノ整多項式デアル。故ニ λ ガ正ノ整數又ハ負ノ有理

數デアル場合ヲ除ケバ α_{mn} ハ唯一通リニキマル。M ハ負デナイ整數ノ對カラ成ル有限集合デ，(m, n) ガ M ニ屬スレバ $j \leqq m$, $k \leqq n$ デアルヤウナ (j, k) モ M ニ屬スルモノトスル。

$$y = \sum_{M} \alpha_{jk} x^{j} (Cx^{\lambda})^{k} + z$$

ト置イテ z ガ滿足スル方程式ヲ

$$\text{(C)} \quad x\frac{dz}{dx} = g(x, Cx^{\lambda}, z)$$

ト書ケバ

$$\text{(c)} \quad g(x, \xi, z) \sim \sum b_{lmn} x^{l} \xi^{m} z^{n}$$

$$b_{lm0} \ ((l, m) \in M), \quad b_{001} = \lambda$$

トナル。

λガ正ノ整數デアル場合ニハ形式的ノ解

$$(\gamma) \quad y \sim \sum \alpha_{jk} x^{j} ((\varkappa \log x + C) x^{\lambda})^{k} \quad (\alpha_{00}=0, \alpha_{01}=1)$$

ヲ求メル。$x^{m}((\varkappa \log x + C)x^{\lambda})^{n}$ ノ係數ヲ比較スルコトニヨリ

$$(m + (n-1)\lambda)\alpha_{mn} + (n+1)\varkappa\,\alpha_{m-\lambda, n+1} = P_{mn}(\alpha)$$

ヲ得ル。$P_{mn}(\alpha)$ ハ α_{jk} ($j \leqq m$, $k \leqq n$ 但シ α_{mn} ヲ除ク) ノ整多項式デ，添字ニ負數ノアル α_{jk} ハ 0 トスル。故ニ $m = 0, 1, \ldots\ldots, \lambda-1$ ト置クコトニヨリ勝手ナ n ニ對シテ $\alpha_{0n}, \ldots\ldots, \alpha_{\lambda-1, n}$ ガ唯一通リニキマル。$m = \lambda$, $n = 0$ トシ，$\alpha_{01} = 1$ ニ注意スレバ $\varkappa = P_{\lambda 0}(\alpha)$ ヲ得ル。$\alpha_{\lambda 0}$ ハ勝手ナ値ヲ取ルコトガ出來ルガ，ソレヲ C ト一緒ニスルコ

トガ出來ルカラ混雜ヲ避ケルタメ C ヲ勝手ナ常數トシ $\alpha_{\lambda 0}=0$ トスル。 $\alpha_{\lambda 0}, \cdots\cdots, \alpha_{\lambda, n-1}$ ガキマッタナラバ, $m=\lambda$ ト置クコトニヨリ α_{mn} ガキマル。一般ニ α_{jk} ($j<m$ 又ハ $j=m$, $k<n$ 但シ $m>\lambda$, $n \geqq 0$) ガ求マッタナラバ α_{mn} ガソレカラ唯一通リニキマル。

$$y=\sum_{j+\lambda k<N} \alpha_{jk} x^j((\alpha \log x+C)x^\lambda)^k+z$$

ト置キ z ガ満足スル方程式ヲ

$$\text{(D)} \quad x\frac{dz}{dx}=g(x,(\alpha \log x+C)x^\lambda, z)$$

ト書ケバ

$$\text{(d)} \quad g(x,\xi,z) \sim \sum b_{lmn} x^l \xi^m z^n$$

$$b_{lm0}=0 \quad (l+\lambda m<N), \quad b_{001}=\lambda$$

トナル。

λガ負ノ有理數デアル場合ガ殘ッテキルガ, 此ノ場合ニハ形式的ノ解ガ大シテ重要ナ意味ヲ持タナイカラ省ク。

<u>假定ノ取リ方</u> (a) ニ關スル假定ヲ成ルベク弱イ所カラ出發シテ $f(x,y)$ ガ $(0,0)$ デ正則トイフ所マデ次第ニ强クシテ行キ, 其ノ結果 (A) ノ解ニドレダケノ影響ガ現ハレルカヲ見ル。

$$f(e^t, e^s)=\mathcal{F}(t,s)$$

ト置キ $\mathcal{F}(t,s)$ ハ考ヘテキル範圍デ一價ト假定スル. $f(x,y)$ ハ $(0,0)$ ノ近傍デ多價函數デアッテモ差支ヘナイ。

$$t=\sigma+i\tau,\quad s=p+iq$$

ト置ク。

1° $\mathfrak{F}(t,s)$ ハ

$$(1)\quad \begin{cases}\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\leqq\sigma_0\\ q_1+p\tan\omega_1<q<q_2+p\tan\omega_2,\ p<p_0\end{cases}$$

デ連続デ，漸近展開 (a) ハ (t,s) ガ (1) ヲ満足シナガラ (∞,∞) ニ近ヅクトキ成立スル。

2° 前ト同ジ假定ノ上ニ更ニ $\mathfrak{F}(t,s)$ ガ s ニ関シテ正則デアルトイフ假定ヲ加ヘル。

3° 前ト同ジ假定ノ上ニ更ニ $\mathfrak{F}(t,s)$ ガ s ニ関シテ $2\pi i$ ヲ週期トスルトイフ假定ヲ加ヘル。

$$\mathfrak{F}(t,\log y)=F(t,y)$$

ト置ケバ $F(t,y)$ ハ $y=0$ デ正則デ

$$(2)\quad F(t,y)=\sum F_n(t)\,y^n$$

$$(3)\quad F_n(t)\sim\sum a_{jn}e^{jt}$$

トナル。(2) ハ

$$(4)\quad \tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\leqq\sigma_0,\ |y|\leqq\Delta_0$$

ニ於テ一様收斂，(3) ハ

$$(5)\quad \tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\to-\infty$$

ノトキ成立スル。

4° $\mathfrak{F}(t,s)$ ハ

$$(6)\quad \begin{cases}\tau_1+\sigma\tan\theta_1\leqq\tau\leqq\tau_2+\sigma\tan\theta_2,\ \sigma\leqq\sigma_0\\ q_1+p\tan\omega_1\leqq q\leqq q_2+p\tan\omega_2,\ p\leqq p_0\end{cases}$$

デ連続，内部デ正則，漸近展開 (a) ハ (t,s) ガ (6) ヲ満足

シナガラ (∞, ∞) ニ近ヅク時成立スル。

5° 前ト同ジ假定ノ上ニ更ニ $\mathcal{F}(t, s)$ ガ s ニ関シテ $2\pi i$ ヲ週期トスルコトヲ假定スル。(2) ハ

(7) $\quad \tau_1 + \sigma \tan\theta_1 \leqq \tau \leqq \tau_2 + \sigma \tan\theta_2, \ \sigma \leqq \sigma_0, \ |y| \leqq \Delta$。

ニ於テ一様收斂, (3) ハ

(8) $\quad \tau_1 + \sigma \tan\theta_1 \leqq \tau \leqq \tau_2 + \sigma \tan\theta_2, \quad \sigma \to -\infty$

ノトキ成立スル。

6° 前ト同ジ假定ノ上ニ更ニ $F(t, y)$ ガ t ニ関シテ $2\pi i$ ヲ週期トスルコトヲ假定スル。$f(x, y)$ ハ $x = y = 0$ デ正則デ

$$f(x, y) = \sum a_{jk} x^j y^k$$

トナル。

<u>場合ノ分ケ方</u>　λ ノ値ニ依ッテ次ノヨウニ場合ヲ分ケル。

(i) $\quad \mu - \nu \tan\theta > 0$, λ キ正ノ整數.

(ii) $\quad \lambda =$ 正ノ整數.

(iii) $\quad \mu - \nu \tan\theta = 0$

(iv) $\quad \mu - \nu \tan\theta < 0$, λ キ負ノ有理數.

(v) $\quad \lambda =$ 負ノ有理数

θ ハ θ_1, θ_2 ノ間ノ値デアル．(i), (ii), (iii), (iv), (v) ノ中カラ一ツ, $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ$ ノ中カラ一ツ取リ出シテ組合セルコトニヨッテ 30 個ノ場合ヲ生ズル。ソレラヲ (I, i, 1), (I, i, 2), ------- デ表ス。